 **Технически университет – София**  
**Електротехнически Факултет**  
**Катедра „Обща електротехника”**

**Презентация № 2**

**Стационарни синусоидални режими еднофазни  
електрически вериги**

***дисциплина „Електротехника и електроника ” – FBME27  
ОКС „Бакалавър” от Учебните планове на специалности  
от МФ, МТФ, ЕМФ и ФТ***



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

***„Организационна и технологична инфраструктура за учене през  
целия живот и развитие на компетенции”***

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
***Инвестира във вашето бъдеще!***



Европейски социален фонд

# Стационарни синусоидални режими еднофазни електрически вериги

1. Променливотокови електрически величини- особености,характеристики
2. Синусоидални ел.величини.Основни параметри. Ефективна стойност. Начини за изобразяване .
3. Идеални елементи при стационарен синусоидален режим.Смисъл на фазовите съотношения и видовете мощности.
4. Реални елементи при стационарен синусоидален режим. Видове заместващи схеми. Основни зависимости и режими. Ролята на фактора на мощността и начини за подобряването му (в пример).
5. Идеални елементи, захранвани от периодични несинусоидални източници (напр. правоъгълни захранващи напрежения и токове,понятия за интегратор,диференциатор и филтри)
- 6 Честотни характеристики, филтри.



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

*„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”*

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
***Инвестира във вашето бъдеще!***



Европейски социален фонд

# Синусоидални ел.величини.Основни параметри. Ефективна стойност. Индуктиране на синусоидално напрежение.

Рамка от проводник се върти с постоянна скорост  $\omega = d\alpha/dt$  в магнитно поле с магнитна индукция  $B$ .

Магнитният поток, който рамката обхваща е променлив:

$$\Phi(\alpha) = Blb \sin\alpha(t) = B A \sin\alpha(t)$$

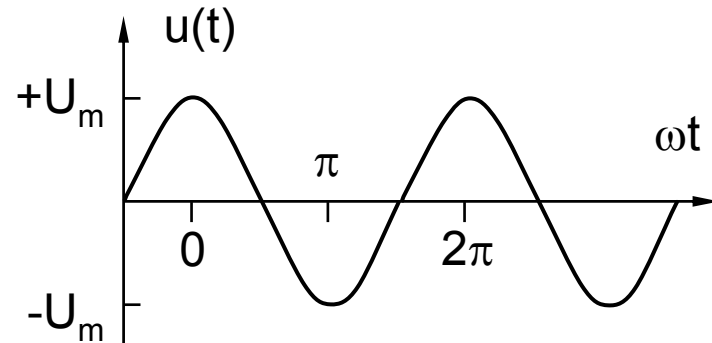
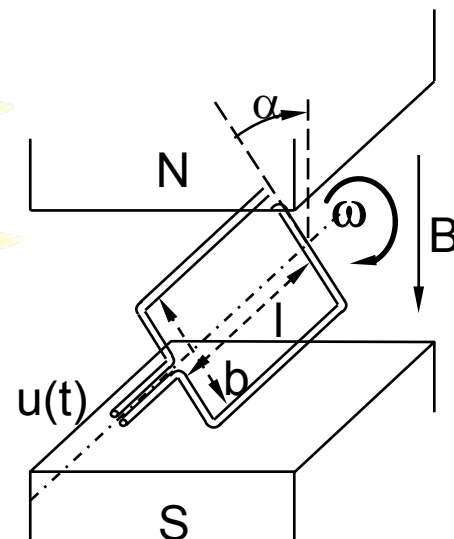
при  $d\alpha = \omega dt$  и  $\alpha(t) = \omega t + \alpha_0$

$A = lb$  : площта на рамката

$A \sin\alpha$  : проекцията на  $A$  по направление на  $B$

На изводите се получава индуктирано напрежение:

$$u(t) = \frac{d\Phi(\alpha)}{dt} = B A \omega \cos(\omega t + \alpha_0) = U_m \cos(\omega t + \alpha_0)$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Синусоидални ел.величини.Основни параметри.

За производството на електрическа енергия се използват трифазни синхронни генератори, при които се върти магнитното поле (роторът е постоянен ток електромагнит), а намотките, в които се индуцира напрежение, са неподвижни.

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi) \quad i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$U_m$  Амплитуда на напрежението

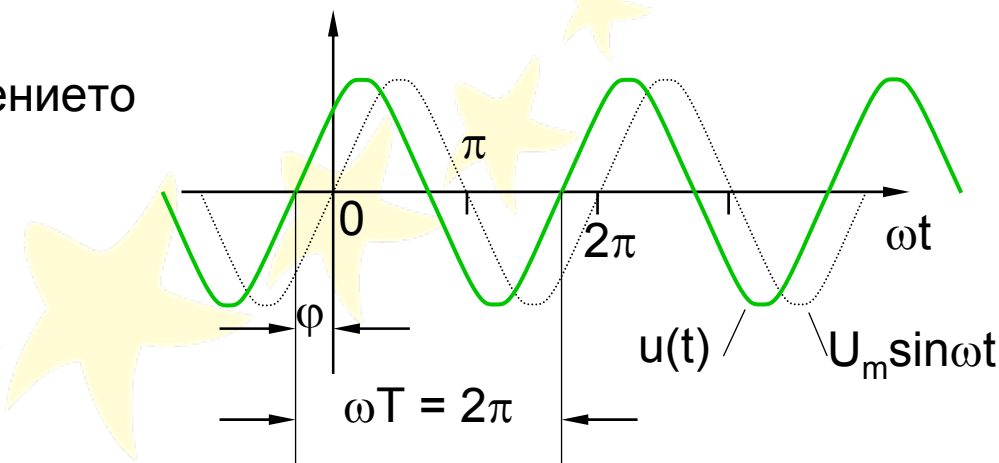
$I_m$  Амплитуда на тока

$\omega$  Кръгова честота

$\varphi$  Начален фазов ъгъл

$\omega t + \varphi$  Ъгъл на изменение

където: 
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, [rad/s]$$



$T$ : период на повторение;

$f=1/T$ : честота

$[f] = 1/sec = 1 Hz (Hertz)$

Стандартната стойност на честотата е  $f = 50 Hz$ , съответно периодът е  $T = 0,02 sec$ .



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

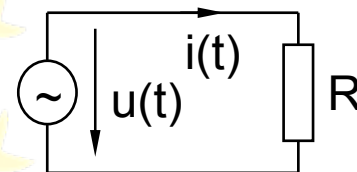
# Електрическа верига с идеален резистор

Идеален резистор (нагревател) със съпротивление  $R$  е включен към източник на синусоидално напрежение .

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

протича ток

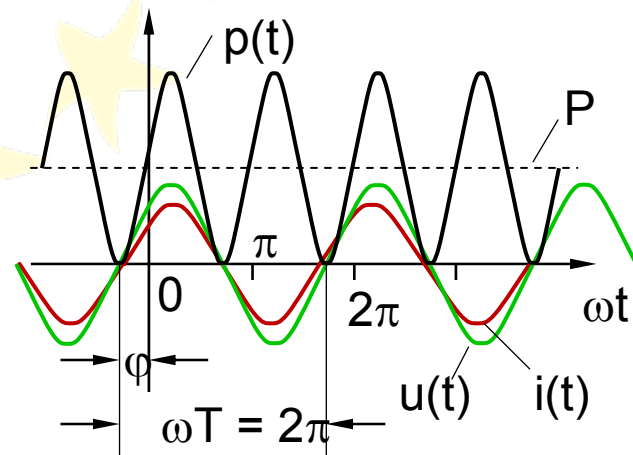
$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \varphi)$$



В съпротивлението  $R$  еленергията се преобразува в топлина. Потребената мощност е:

$$p(t) = u(t)i(t) = \frac{u^2(t)}{R} = \frac{U_m^2}{R} \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$p(t) = \frac{U_m^2}{2R} (1 - \cos 2(\omega t + \varphi))$$



$P$  По дефиниция е средната стойност на моментната мощност  $p(t)$

$$P = \frac{U_m^2}{2R}, [W]$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042  
„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Синусоидални ел.величини.Основни параметри. Ефективна стойност.

Аритметичната средна стойност на една периодична величина , в случая  $P(t)$  е:

$$P_{cp} = P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_m^2}{2R} (1 - \cos 2(\omega t + \varphi)) dt$$

$$P = \frac{U_m^2}{2R} \quad P: \text{активна мощност}$$

Нагревател със съпротивление  $R$  , включен към променливо напрежение консумира такава

мощност, както би  $U$  консумирал и при постоянно напрежение  $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$  (един и същ ефект )

$U$  ефективна стойност на синусоидално напрежение  $u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \varphi)$  .

При стандартно

напрежение:  $U = 230 \text{ V}$  максималната стойност е  $U_m = \sqrt{2}U = 230\sqrt{2} = 325 \text{ [V]}$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

Дефиниция на ефективна стойност на променлива величина  $a(t)$ :

Средно квадратична стойност

$$A_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a^2(t) dt}$$

Например :  
за напрежение

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

Аналогично  
за ток

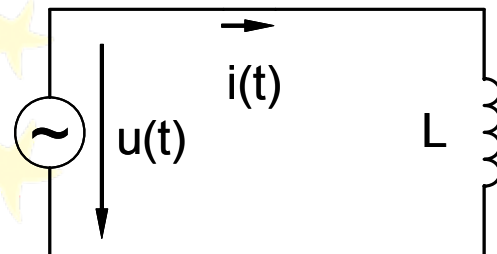
$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

# Намотка с индуктивност $L$ при синусодален променлив ток

Връзка между ток и напрежение при наличие на индуктивност:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad \text{при} \quad i(t) = I_m \sin(\omega t + \beta) \quad \text{то} \quad u(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha)$$

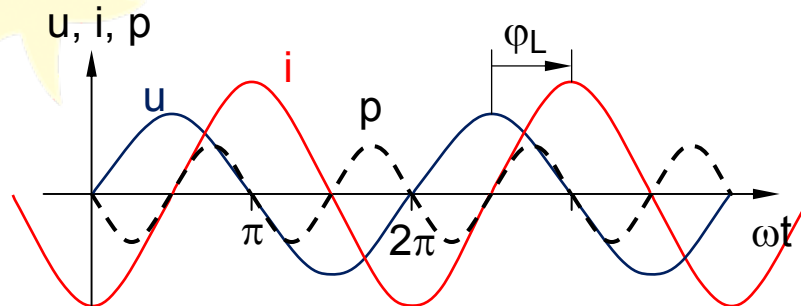
$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha) = \omega L I_m \cos(\omega t + \beta) = \omega L I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2} + \beta)$$



Законът на Ом свързва максималните стойности:

$$U_m = \omega L I_m \quad \alpha = \beta + \frac{\pi}{2} \quad \varphi_L = \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

При еднаква честота ефективната стойност на напрежението е пропорционална на ефективната стойност на тока (това не е така за  $u(t)$  и  $i(t)$ ).



Ъгълът на дефазирание  $\varphi_L = \pi/2 = 90^\circ$  означава, че токът изостава от напрежението

Величината  $\omega L$  е съпротивление :

$$X_L = \omega L \quad \text{Индуктивно реактивно съпротивление}$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Активна и реактивна мощност при идеален индуктивен елемент

Моментната стойност на мощността:

$$p(t) = u(t)i(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha) I_m \sin(\omega t + \beta) = -2UI \sin(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \alpha)$$

$$p(t) = -UI \sin 2(\omega t + \alpha) = -\omega LI^2 \sin 2(\omega t + \alpha) = -\frac{U^2}{\omega L} \sin 2(\omega t + \alpha)$$

$$U_m = \sqrt{2}U; \quad I_m = \sqrt{2}I \quad U_m, I_m : \text{максимални стойности} \quad U, I : \text{ефективни стойности}$$

Активната мощност е равна на нула! ( не се консумира активна електроенергия)

$$P = \bar{p}(t) = -\omega LI^2 \frac{1}{T} \int_0^T \sin 2(\omega t + \alpha) dt = 0$$

→ реактивна индуктивна мощност

$$Q_L = U_L I_L = \frac{U^2}{X_L} = I^2 X_L > 0 \quad [Q_L] = [U][I] = V \cdot A = VAr$$

Между източника и магнитното поле на идеалния индуктивен елемент се установява обратимо колебание на енергия.



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

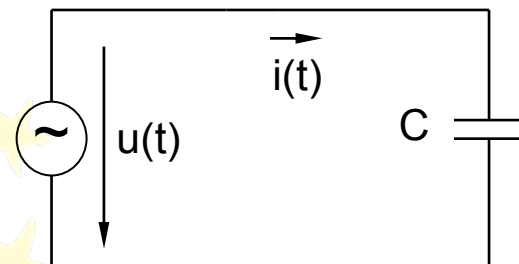


# Идеален капацитивен елемент. Капацитивно реактивно съпротивление

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

Токът е пропорционален на изменението на напрежението т.е. връзката между **напрежението** и **тока** е **интегрална**



Ако напрежението  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha)$

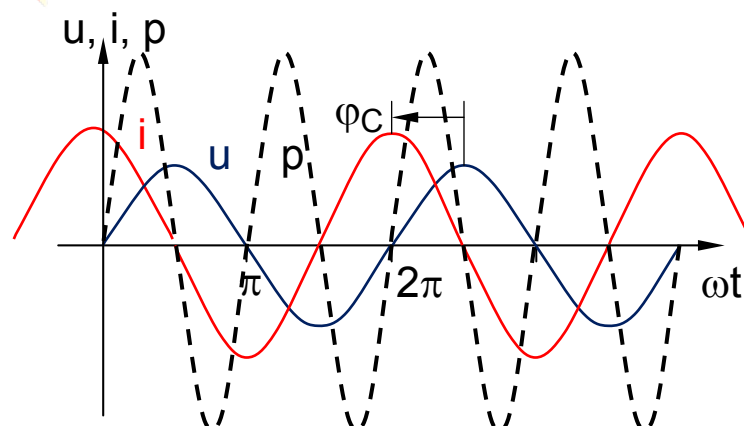
след диференциране намираме тока  $i(t) = I_m \sin(\omega t + \beta)$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \beta) = \omega C U_m \cos(\omega t + \alpha) = \omega C U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2} + \alpha)$$

$$I_m = \omega C U_m \quad \beta = \alpha + \frac{\pi}{2} \quad \varphi_C = \alpha - \beta = -\frac{\pi}{2}$$

Наличието на кондензатор предизвиква закъснение на напрежението спрямо тока. Фазовата разлика е отрицателна и при идеален кондензатор е 90 градуса.

Напрежението изостава по фаза от тока !



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Идеален капацитивен елемент. Капацитивно съпротивление.

## Реактивна мощност на капацитивен елемент

$$X_C = \frac{1}{\omega C}, [\Omega] \quad \text{Реактивно капацитивно съпротивление}$$

$$B_C = \frac{1}{X_C} = \omega C, [S], [Siemens] \quad \text{Реактивна капацитивна проводимост}$$

Капацитивното съпротивление намалява с нарастването на честотата

$$\omega = 2\pi f$$

$$f \rightarrow 0 \quad ; \quad X_C \rightarrow \infty \quad \quad f \rightarrow \infty \quad ; \quad X_C \rightarrow 0$$

Законът на Ом свързва само максималните и ефективните стойности чрез капацитивното съпротивление.

$$I_{\max} = \omega C U_{\max}$$

$$U = X_C I$$

Наличието на капацитет в ел.верига предизвиква закъснение на напрежението спрямо тока. Фазовата разлика  $\varphi_C$  между напрежението и тока е отрицателна и при идеален капацитивен елемент е -  $\varphi_C = -\pi/2$   
Напрежението изостава по фаза от тока!



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Активна и реактивна мощност при идеален капацитивен елемент

Моментната стойност на мощността:

$$p(t) = u(t)i(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha) I_m \sin(\omega t + \beta) = 2U I \sin(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \alpha)$$

$$p(t) = U I \sin 2(\omega t + \alpha) = \frac{1}{\omega C} I^2 \sin 2(\omega t + \alpha) = \omega C U^2 \sin 2(\omega t + \alpha)$$

$$P = \bar{p}(t) = -\omega C U^2 \frac{1}{T} \int_0^T \sin 2(\omega t + \alpha) dt = 0$$

Активната мощност е равна на нула!

( кондензаторът не консумира активна електроенергия)

→ реактивна капацитивна мощност

$$Q_C = U_C I_C = \frac{U^2}{X_C} = I^2 X_C \quad [Q_C] = [U][I] = V \cdot A = VAr$$

При капацитивен елемент се създава обратимо (беззагубно) колебание на електрическа енергия, създаване и разпадане на електрическо поле.



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Анализ на ел.верига чрез тригонометрични функции и преобразувания

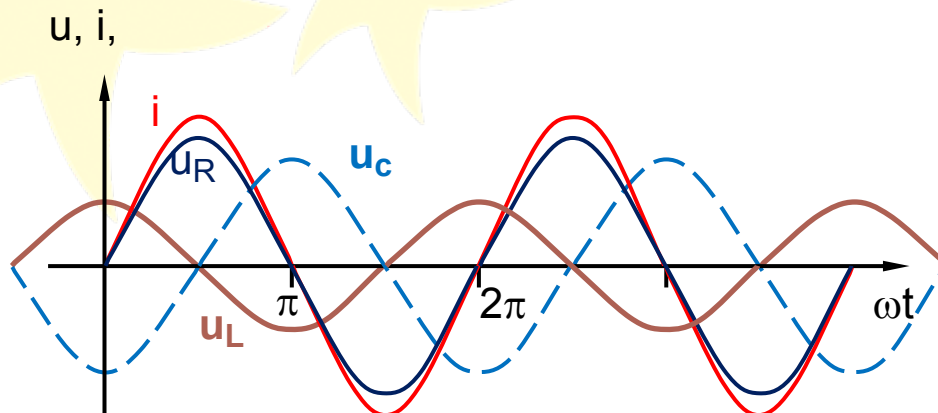
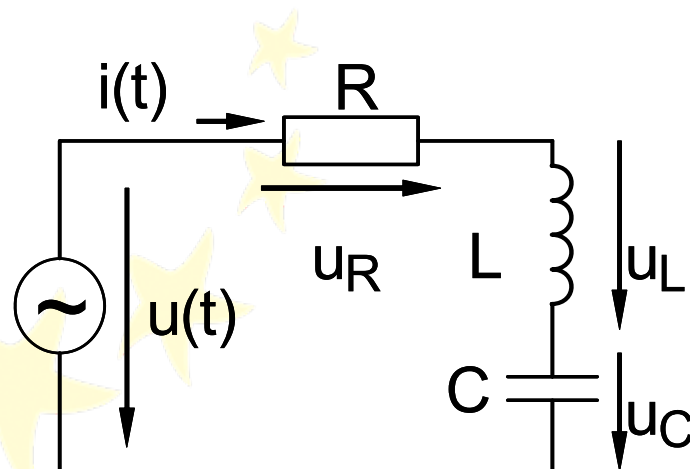
## -- последователна заместваща схема

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \beta)$$

$$u_R(t) = R I_m \sin(\omega t + \beta)$$

$$u_L(t) = \omega L I_m \sin(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2})$$

$$u_C(t) = \frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t + \beta - \frac{\pi}{2})$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

Съгласно втори закон на Кирхоф сумата на моментните стойности е

$$u = u_R + u_L + u_C$$

Моментната стойност на общото напрежение е

$$u(t) = I_m \left[ R \sin(\omega t + \beta) + \omega L \sin\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\omega C} \sin\left(\omega t + \beta - \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$u(t) = I_m \left[ R \sin(\omega t + \beta) + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \sin\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$= I_m \left[ R \sin(\omega t + \beta) + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \cos(\omega t + \beta) \right]$$

Реактивното съпротивление  $X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$  следователно:

$$u(t) = I_m \left[ R \sin(\omega t + \beta) + X \cos(\omega t + \beta) \right]$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

От дефиницията за ефективната стойност на общото напрежение и след сложни тригонометрични преобразувания може да се получи:

$$U = \sqrt{2} I \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [R \sin(\omega t + \beta) + X \cos(\omega t + \beta)]^2 dt}$$

След интегрирането :

$$U = \sqrt{2} I \sqrt{\frac{1}{T} \left[ R^2 \frac{T}{2} + X^2 \frac{T}{2} \right]} = I \sqrt{R^2 + X^2} = I \cdot z$$

$$U = I \sqrt{R^2 + X^2} = I \cdot z$$

В общия случай може просто да се използват правилата в правоъгълен триъгълник.

$$z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Ъгълът  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R}$

Импеданс на цялата верига



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

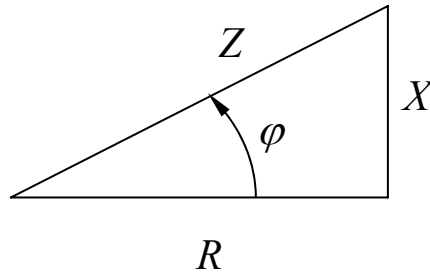
„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

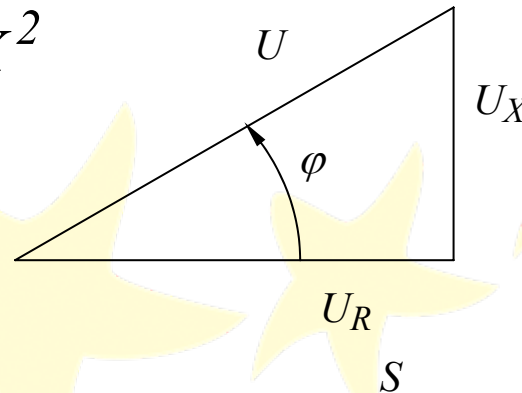
$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$



Триъгълник на съпротивленията

$$U = \sqrt{I^2 R^2 + I^2 X^2}$$

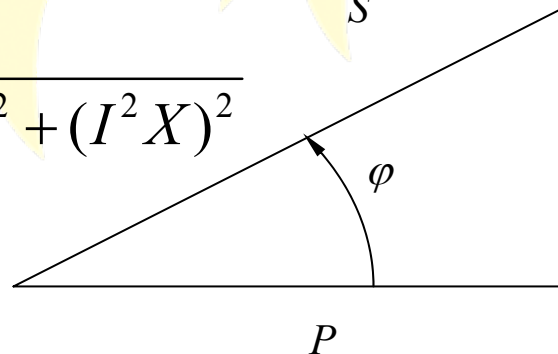
$$U = \sqrt{U_R^2 + U_X^2}$$



Триъгълник на напреженията

$$S = U \cdot I = \sqrt{(I^2 R)^2 + (I^2 X)^2}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$



Триъгълник на мощностите

Пълна (верижна) мощност на цялата верига S , [ VA]



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Пресмятане с комплексни числа

**дефиниция:**

$$\underline{z} = a + jb = \operatorname{Re}\{\underline{z}\} + j \operatorname{Im}\{\underline{z}\}$$

$$j = \sqrt{-1}; \quad j^2 = -1$$

$a = \operatorname{Re}\{\underline{z}\}$   $a$  е реалната част на комплексното число  $\underline{z}$ .

$b = \operatorname{Im}\{\underline{z}\}$   $b$  е имагинерната част на комплексното число  $\underline{z}$ .

На  $\underline{z}$  комплексно спрегнатото число  $\underline{z}^*$  се получава, като вместо  $j$  се замести с  $-j$ :  $\underline{z}^* = a - jb$ ;  $\operatorname{Re}\{\underline{z}^*\} = \operatorname{Re}\{\underline{z}\}$ ;  $\operatorname{Im}\{\underline{z}^*\} = -\operatorname{Im}\{\underline{z}\}$

Събиране и изваждане на комплексни числа:

$$\underline{z}_1 = a_1 + jb_1; \quad \underline{z}_2 = a_2 + jb_2$$

$$\underline{z}_1 \pm \underline{z}_2 = (a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

$$\underline{z} + \underline{z}^* = 2a = 2 \operatorname{Re}\{\underline{z}\}$$

$$\underline{z} - \underline{z}^* = 2jb = 2j \operatorname{Im}\{\underline{z}\}$$

$$\operatorname{Re}\{\underline{z}\} = \frac{1}{2}(\underline{z} + \underline{z}^*)$$

$$\operatorname{Im}\{\underline{z}\} = \frac{1}{2j}(\underline{z} - \underline{z}^*)$$

(в следващите формули комплексните числа са отбелязване с долна черта, например  $\underline{z}$  )



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд



# Умножение, деление, модул на комплексно число.

Умножение на комплексни числа:  $\underline{z}_1 = a_1 + jb_1; \quad \underline{z}_2 = a_2 + jb_2$

$$\underline{z} = \underline{z}_1 \underline{z}_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = a_1 a_2 + j^2 b_1 b_2 + j(a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad \star$$

$$\underline{z} = \underline{z}_1 \underline{z}_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Например:  $\underline{z} \underline{z}^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 - j^2 b^2 + j(ab - ab) = a^2 + b^2$

Деление на комплексни числа :

$$\underline{z} = \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} \cdot \frac{a_2 - jb_2}{a_2 - jb_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Дефиниция: модулът на комплексно число  $\underline{z}$  е :

$$|\underline{z}| = \sqrt{\underline{z} \underline{z}^*} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\text{Re}^2\{\underline{z}\} + \text{Im}^2\{\underline{z}\}} = |\underline{z}^*|$$

Например:  $\frac{1}{\underline{z}} = \frac{1}{\underline{z} \underline{z}^*} = \frac{\underline{z}^*}{|\underline{z}|^2}; \quad \frac{1}{a + jb} = \frac{a - jb}{a^2 + b^2}$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Представяне в комплексната равнина

Представяме  $a = \operatorname{Re} \{ z \}$  и  $b = \operatorname{Im} \{ z \}$  като координати  $x$  и  $y$  в декартова координатна система.

Точката  $P(x, y) = P(a, b)$  е за  $z = a + jb$ ,  
а  $P(a, -b)$  съответно за  $z^* = a - jb$ .

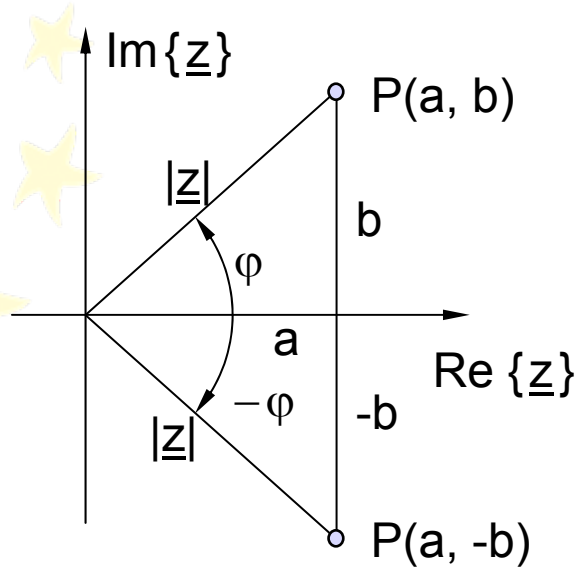
В полярна координатна система точката  $P$  се представя с координати  $r$  и ъгъл  $\varphi$ .

$r$  е разстоянието от началото на координатната система до точката  $P$ .

$$r = |z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{Re}^2 \{ z \} + \operatorname{Im}^2 \{ z \}}$$

$\varphi$  е ъгълът, който отсечката  $r = |z|$  сключва с оста  $x = \operatorname{Re} \{ z \}$ ; (ъгълът е положителен, тъй като се приема за условно положителна посока противоположно на часовниковата).

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} = \frac{\operatorname{Im} \{ z \}}{\operatorname{Re} \{ z \}}; \quad \varphi = \arctan \frac{\operatorname{Im} \{ z \}}{\operatorname{Re} \{ z \}}$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Синусоидално напрежение в комплексната равнина

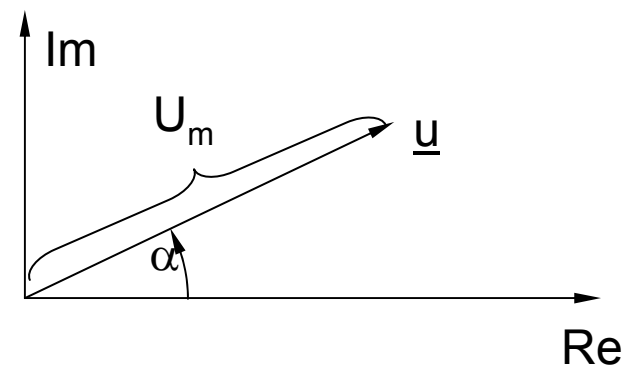
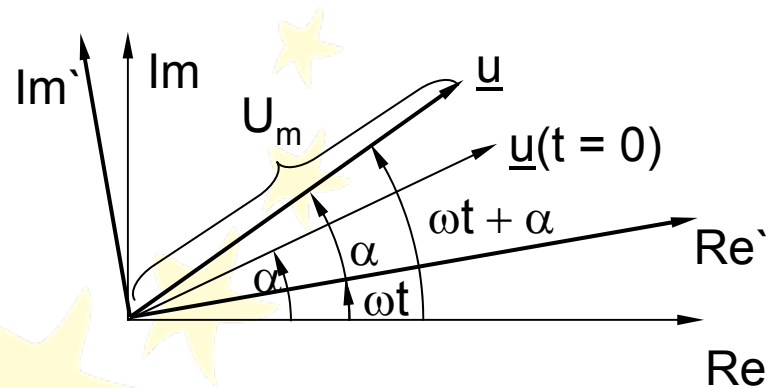
$$\underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \alpha)}$$

При  $t = 0$ :

- в система с координати  $Re, Im$ .
- $\underline{u}$  е завъртяна на ъгъл  $\alpha$ .

Променливата във времето величина  $\underline{u}$  се представя като вектор в координатна система  $Re', Im'$ , която се върти с ъглова скорост  $\omega$  обратно на часовниковата стрелка, респективно на ъгъл  $\omega t$

За опростяване на диаграмите, тъй като обикновено се интересуваме от ъгъла на дефазирание между напрежение и ток, се използва само координатна система с оси  $Re$  и  $Im$ , началният фазов ъгъл  $\alpha$  е постоянен, а често се приема за нула.



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Ел. Верига с идеални параметри R, L и C

## Активно съпротивление R

Комплексните стойности са :

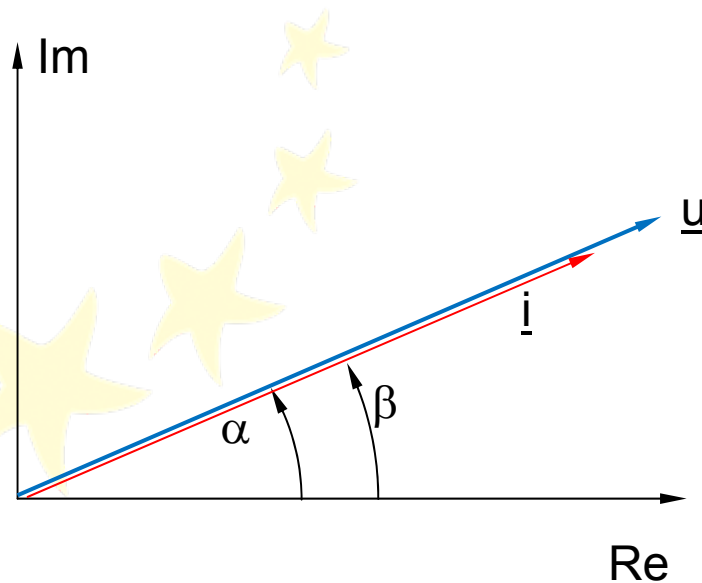
$$\underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \alpha)} \quad \underline{i} = I_m e^{j(\omega t + \beta)}$$

При активно съпротивление токът и напрежението са пропорционални :

$$\underline{u} = R \underline{i} \quad \text{респ.} \quad \underline{i} = \frac{u}{R} \quad \longrightarrow \quad \alpha = \beta$$

Векторът на тока съвпада по посока с вектора на напрежението.

Ъгълът на дефазиране е  $\varphi = \alpha - \beta = 0$ .



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Ел. Верига с идеални параметри R, L и C

## Индуктивно съпротивление

Диференциалното уравнение при наличие на

индуктивност:  $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$

заместваме  $i = I_m e^{j(\omega t + \beta)}$  и търсим  $\underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \alpha)}$

Комплексните стойности на тока и напрежението са:

$$\underline{u} = j\omega L I_m e^{j(\omega t + \beta)} \quad \longrightarrow \quad \underline{u} = j\omega L \underline{i} \quad \text{и} \quad \underline{i} = \frac{1}{j\omega L} \underline{u}$$

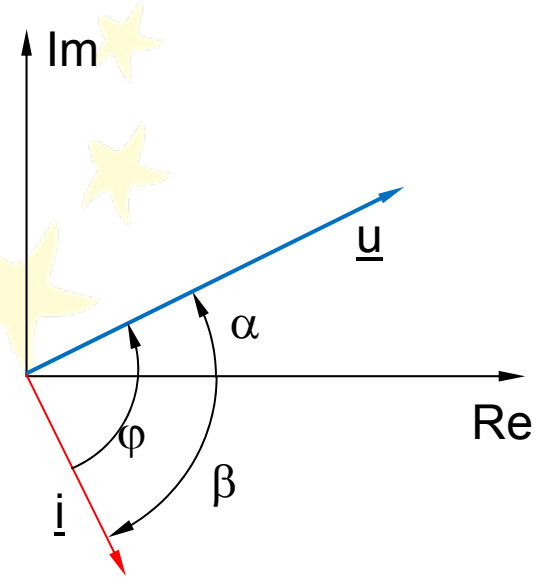
За комплексното индуктивно съпротивление:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = j\omega L$$

За началният фазов ъгъл на напрежението  $\alpha$  използваме  $j = e^{j\pi/2}$  :

$$\underline{u} = e^{j\pi/2} \omega L I_m e^{j(\omega t + \beta)} = \omega L I_m e^{j(\omega t + \beta + \pi/2)} = U_m e^{j(\omega t + \alpha)}$$

началният фазов ъгъл на напрежението  $\alpha$  е с  $90^\circ$  по-голям от този на тока



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Ел. Верига с идеални параметри R, L и C Капацитивно реактивно съпротивление

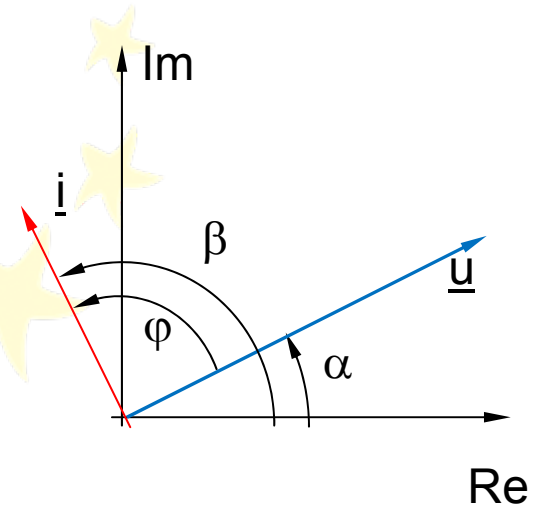
Диференциалното уравнение при наличие на капацитет:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

заместваме  $\underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \alpha)}$  и търсим  $\underline{i} = I_m e^{j(\omega t + \beta)}$

Комплексните стойности на тока и напрежението са:

$$\underline{i} = j\omega C U_m e^{j(\omega t + \alpha)} \longrightarrow \underline{i} = j\omega C \underline{u} \text{ респ. } \underline{u} = \frac{1}{j\omega C} \underline{i}$$



За комплексното капацитивно съпротивление:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{1}{j\omega C} = j \frac{-1}{\omega C}$$

За началният фазов ъгъл на напрежението  $\alpha$  използваме  $j = e^{j\pi/2}$  :

$$\underline{i} = e^{j\pi/2} \omega C U_m e^{j(\omega t + \alpha)} = \omega C U_m e^{j(\omega t + \alpha + \pi/2)} = I_m e^{j(\omega t + \beta)}$$

началният фазов ъгъл на напрежението  $\alpha$  е с  $90^\circ$  по-малък от този на тока



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Ел. Верига с идеални параметри R, L и C, пълно комплексно съпротивление при последователно свързване

Напрежението на веригата е:  $\underline{u} = \underline{u}_R + \underline{u}_L + \underline{u}_C$

$$\underline{u} = R\underline{i} + j\omega L\underline{i} + \frac{1}{j\omega C}\underline{i} = R\underline{i} + j\omega L\underline{i} - j\frac{1}{\omega C}\underline{i}$$

$$\underline{u} = \left( R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \right) \underline{i} = \left( R + j\left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right) \underline{i} = (R + jX) \underline{i}$$

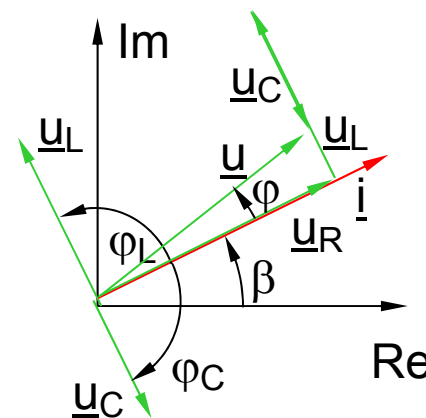
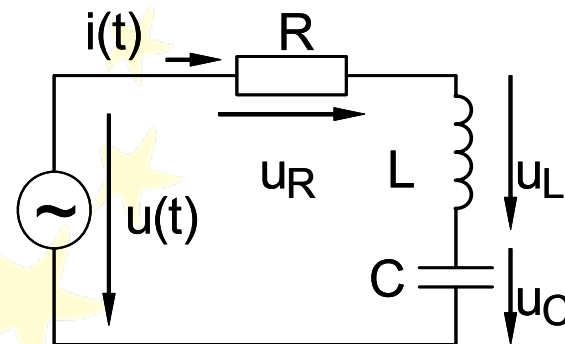
Пълното комплексно съпротивление (Импеданс)  $\underline{Z}$ :

$$\underline{Z} = R + j\left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + jX = Ze^{j\varphi} = Z \cos\varphi + jZ \sin\varphi$$

$$|\underline{Z}|^2 = \underline{Z} \cdot \underline{Z}^* = R^2 + X^2 \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

За ъгълът на дефазиране  $\varphi$  между напрежението и тока

$$\tan\varphi = \frac{X}{R} \quad \varphi = \arctan\frac{X}{R}$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през  
целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Мощности в променливотокова верига

$$i(t) = I_m \sin(\omega t)$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

## Моментна мощност:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m I_m \sin(\omega t) \sin(\omega t + \varphi)$$

$$p(t) = U_m I_m \sin(\omega t) (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi)$$

$$p(t) = U_m I_m \cos \varphi \sin^2 \omega t + U_m I_m \sin \varphi \sin \omega t \cos \omega t$$

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t) + \frac{U_m I_m}{2} \sin \varphi \sin 2\omega t$$

## Активна мощност:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = U I \cos \varphi$$

Активна е тази мощност, която в нагревателите се превръща в топлинна, а в елмашините - в механична мощност на вала



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

## Реактивна мощност:

$$Q = \frac{U_m I_m}{2} \sin \varphi = U I \sin \varphi$$

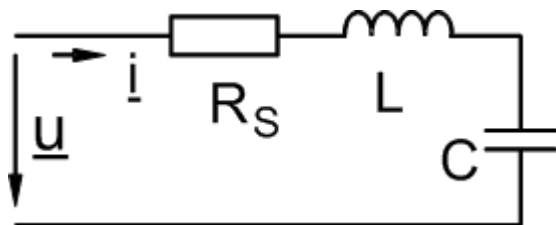
## Пълна мощност на веригата:

$$S = \frac{U_m I_m}{2} = U I = \sqrt{P^2 + Q^2}$$



# Резонансни явления.

## Резонанс на напреженията.



**Последователно свързани :**

Елементи с параметри  $L$ ,  $C$  и  $R_S$   
(при малки загуби  $R_S = 0$ )

$$\underline{Z} = R_S + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

дефиниция: **резонансна честота**  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Качествен фактор на последователен контур

$$Q_S = \frac{1}{R_S} \sqrt{\frac{L}{C}}$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

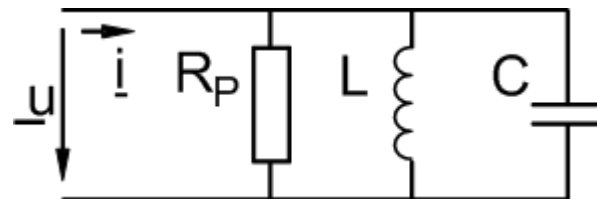
„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

## Резонанс на токовете



**Паралелно свързани:**

Елементи с параметри  $L$ ,  $C$  и  $R_P$   
(възможно е  $R_P \rightarrow \infty$ ,  $1/R_P \rightarrow 0$ )

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R_P} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}}$$

при  $Im \{ Z(\omega_0) \} = 0$ .

Качествен фактор на паралелен контур

$$Q_P = R_P \sqrt{\frac{C}{L}}$$

# Резонансни явления.

## Резонанс на напреженията.

## Резонанс на токовете

Последователно свързани :

$$\underline{Z} = R_S [1 + jQ_S (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})]$$

$$\underline{Z} = |\underline{Z}| e^{j\varphi} = \text{Re}\{ \underline{Z} \} + j \text{Im}\{ \underline{Z} \}$$

$$\frac{|\underline{Z}|}{R_S} = [1 + Q_S^2 (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2]^{1/2}$$

$$\varphi = \arctan Q_S (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})$$

Паралелно свързани:

$$\underline{Z} = \frac{R_P}{1 + jQ_P (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$$

$$\frac{|\underline{Z}|}{R_P} = [1 + Q_P^2 (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2]^{-1/2}$$

$$\varphi = -\arctan Q_P (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Резонансни явления.

## Резонанс на напреженията.

## Резонанс на токовете

$$\operatorname{Re}\{\underline{Z}_S\} = R_S = \text{konst}$$

$$\operatorname{Im}\{\underline{Z}_S\} = \sqrt{\frac{L}{C}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

при  $\omega = \omega_0$  се получава

най-голям ток

$$|\underline{Z}_S(\omega_0)| \rightarrow \min; \quad |I(\omega_0)| \rightarrow \max$$

$$\operatorname{Im}\{\underline{Z}_S(\omega_0)\} = 0$$

$$\varphi_S(\omega_0) = 0, \quad (\mp \frac{\pi}{2} \text{ при } R_S = 0)$$

$$\operatorname{Re}\{\underline{Z}_P\} = \frac{R_P}{1 + Q_P^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$$
$$\operatorname{Im}\{\underline{Z}_P\} = \frac{-R_P Q_P \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}{1 + Q_P^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$$

$$\operatorname{Im}\{\underline{Z}_P\} = \frac{\sqrt{L/C}}{\left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)} \text{ für } R_P \rightarrow \infty$$

най-малък ток

$$|\underline{Z}_P(\omega_0)| \rightarrow \max; \quad |I(\omega_0)| \rightarrow \min$$

$$\operatorname{Im}\{\underline{Z}_P(\omega_0)\} = 0 \text{ für } R_P < \infty$$

$$\operatorname{Im}\{\underline{Z}_P(\omega_0)\} = \pm \infty \text{ für } R_P \rightarrow \infty$$

$$\varphi_P(\omega_0) = 0, \quad (\pm \frac{\pi}{2} \text{ при } R_P \rightarrow \infty)$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

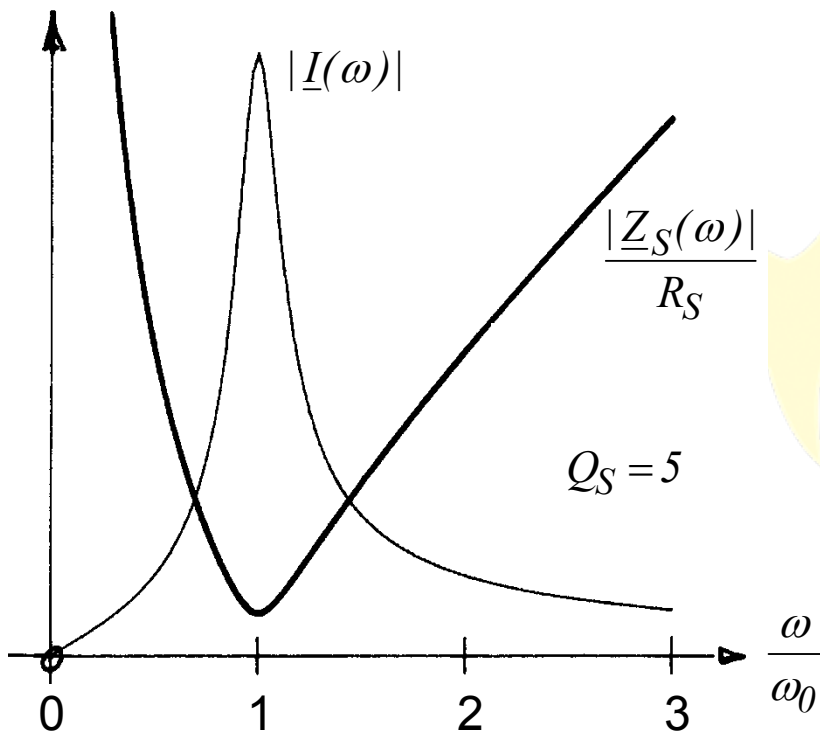
Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



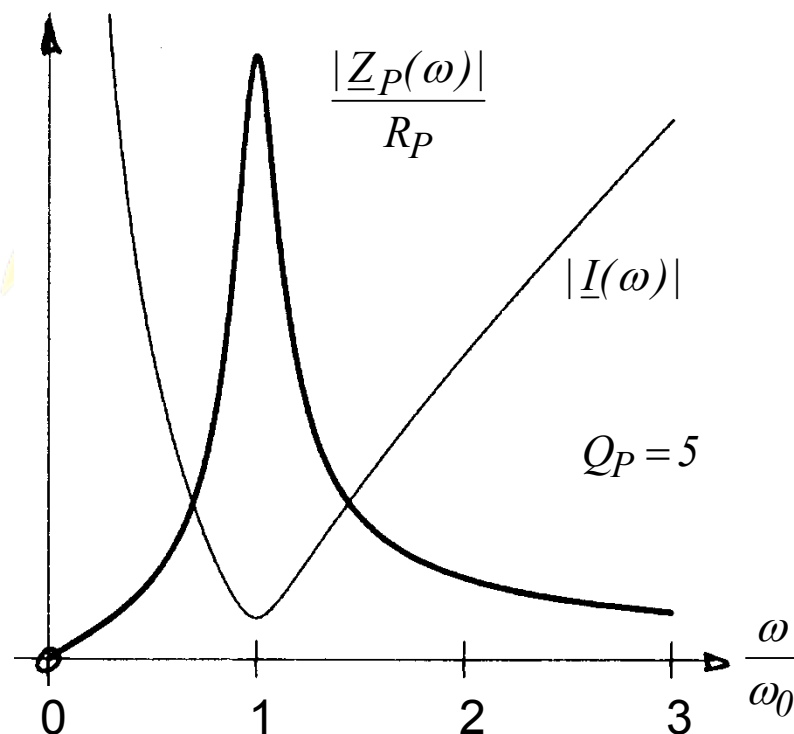
Европейски социален фонд

# Изменения на токовете и импедансите в зависимост от нормираната честота $\frac{\omega}{\omega_0}$

Последователно свързани :



Паралелно свързани:



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

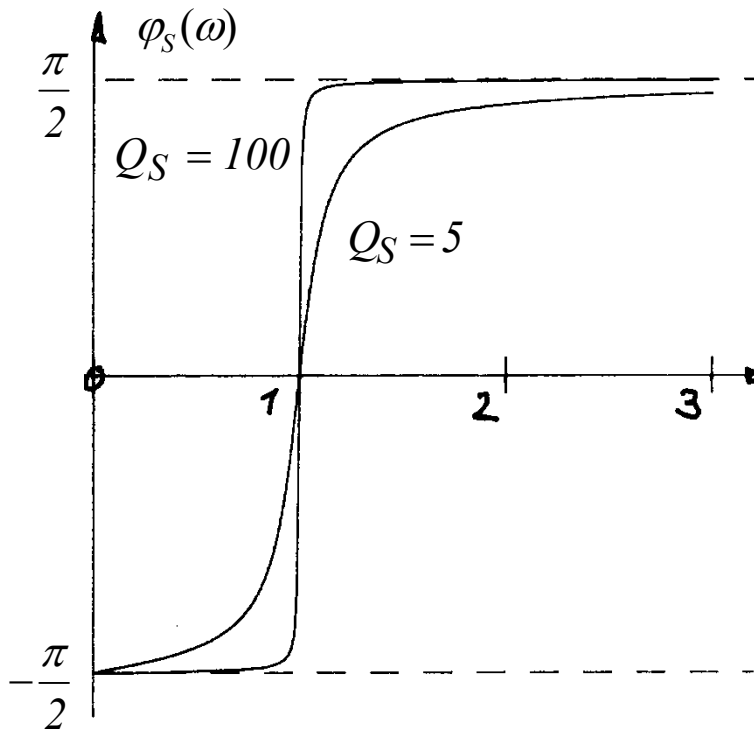
Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



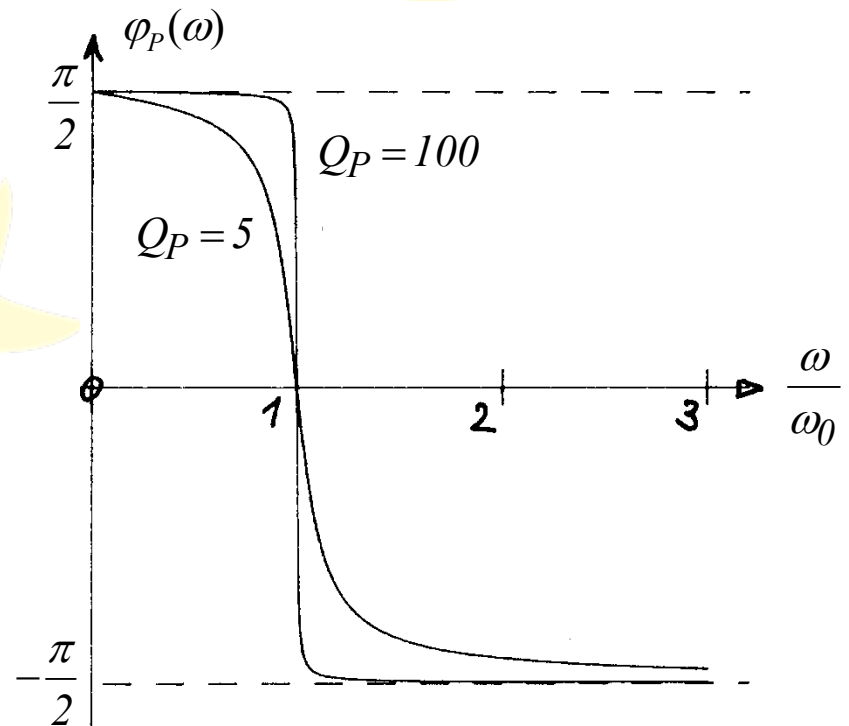
Европейски социален фонд

# Изменения на ъгъла $\varphi$ в зависимост от нормираната честота $\frac{\omega}{\omega_0}$

Последователно свързани :



Паралелно свързани:



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

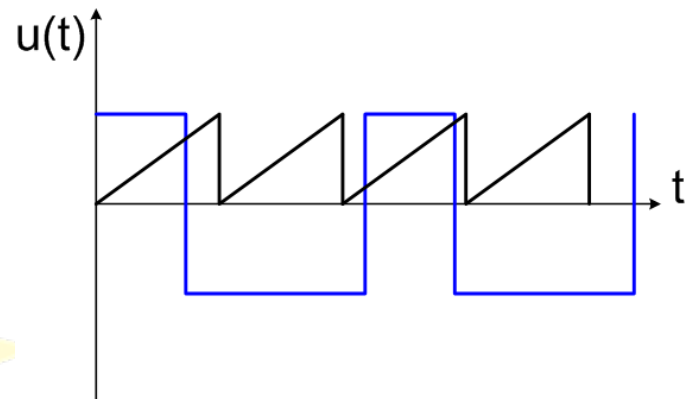
Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

## Ел. Вериги при периодични несинусоидални режими.

Несинусоидални периодични режими настъпват в електрически вериги, захранвани от специални генератори на несинусоидални напрежения . Такива източници с правоъгълна, трионообразна, триъгълна и друга форма на напрежението се използват много често в автоматиката, изчислителната техника, комуникационната техника и автомобилната електроника .



Периодичните несинусоидални величини могат да бъдат представени:

- а) графично – с помощта на временни характеристики
- б) аналитично – чрез разлагане в ред на Фурие
- в) спектрално – чрез амплитудночестотни и фазочестотни спектри



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



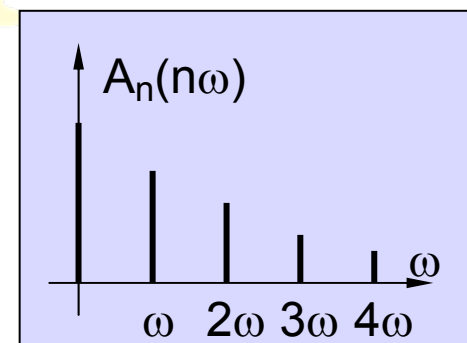
Европейски социален фонд

# Ел. Вериги при периодични несинусоидални режими. Разлагане в ред Фурие . Спектрално представяне.

Математически всяка периодична несинусоидална функция, която отговаря на условията на Дирихле , може да бъде представена в ред на Фурие

$$u(t) = u(t + kT); \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad T : \text{Период}$$

Една периодична функция, например функцията  $u(t)$  която в интервала  $0 < t < T$  има краен брой прекъсвания и екстремуми (това условие в техниката винаги е изпълнено), може да се представи като сума от постоянна съставка и променливи съставки (хармонични) с по-големи честоти :



Амплитуден спектър  $A_n(n\omega)$ , от дискретни линии при кратните честоти  $n\omega$  , наричат линеен спектър

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t); \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n); \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \varphi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}$$

Коефициентите  $a_0, a_n, b_n$  се определят от:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos n\omega t dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin n\omega t dt$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**

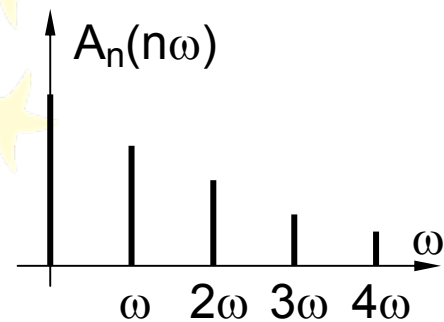
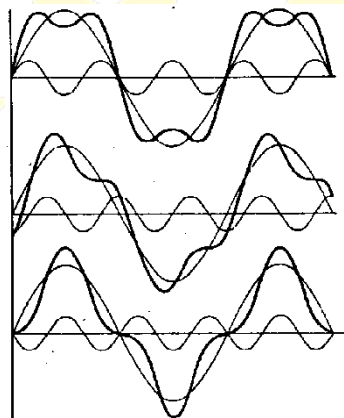
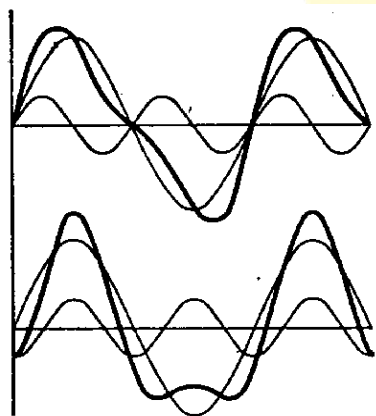


Европейски социален фонд

# Ел. Вериги при периодични несинусоидални режими. Разлагане в ред Фурие. Спектрално представяне.

Всяка периодична функция, ток или напрежение се представя като наслагване на постоянна съставка  $a_0/2$  (средна стойност), основен хармоник ( $n = 1$ ), чийто период е равен на периода на несинусоидалната функция, и висши хармоници ( $n = 2, 3, \dots$ ), чийто честоти са кратни на тази на основния хармоник.

**примери:** наслагване на хармонични трептения с различни честоти:



Висши  
хармоници

Основен хармоник

Постоянна съставка

Отношение на честотите 1 : 2    Отношение на честотите 1 : 3



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през  
целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**

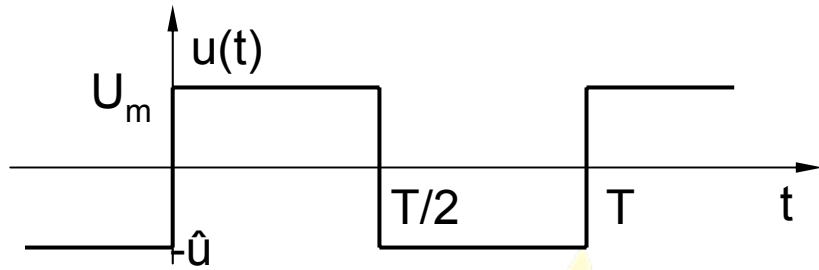


Европейски социален фонд



# Примери (1)

Правоъгълно  
напрежение:

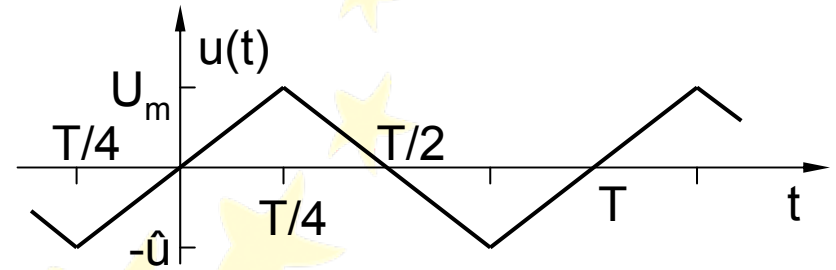


$$u(t) = U_m \quad \text{за} \quad 0 < t < \frac{T}{2}$$

$$u(t) = -U_m \quad \text{за} \quad \frac{T}{2} < t < T$$

$$u(t) = \frac{4}{\pi} U_m (\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots)$$

Триъгълно  
напрежение:



$$u(t) = U_m \frac{4t}{T} \quad \text{за} \quad -\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4}$$

$$u(t) = U_m (2 - \frac{4t}{T}) \quad \text{за} \quad \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4}$$

$$u(t) = \frac{8U_m}{\pi^2} (\sin \omega t - \frac{1}{3^2} \sin 3\omega t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega t - \dots)$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

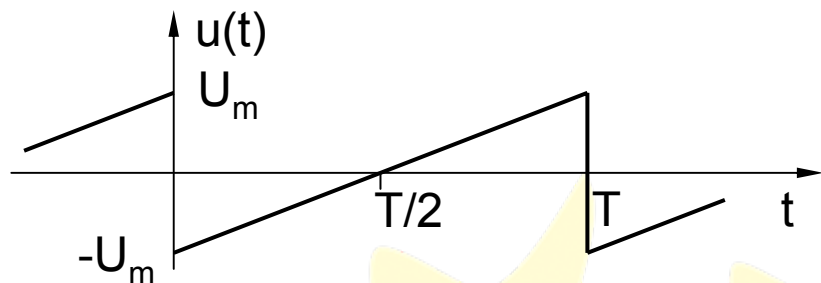
Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

## Примери (2)

Трионообразно  
напрежение:

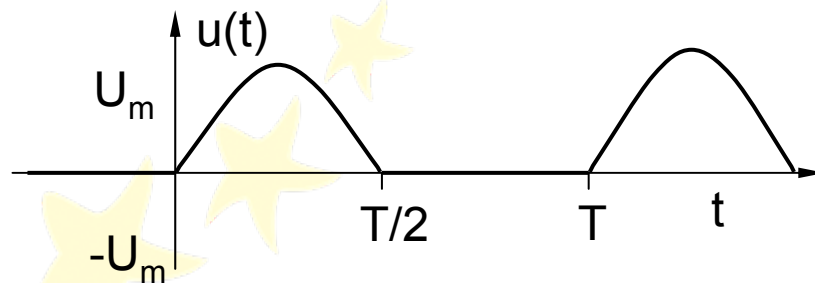


$$u(t) = U_m \left( \frac{2t}{T} - 1 \right)$$

за  $0 \leq t \leq T$

$$u(t) = \frac{2}{\pi} U_m \left( -\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t - \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right)$$

Еднополупериодно изправено  
напрежение:



$$u(t) = \hat{u} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad \text{за} \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2}$$

$$u(t) = 0 \quad \text{за} \quad \frac{T}{2} \leq t \leq T$$

$$u(t) = \frac{U_m}{\pi} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \sin \omega t - \frac{2}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{2}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t - \dots \right)$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през  
целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Приложение на вериги с елементи R, L и C

## Електрически филтри

**Филтрите са** устройства, които се включват между източника и консуматора с цел да се подобри формата на несинусоидалните ток и напрежение. (да изпъкне определена част от спектъра им).

### Пропускащ лентов

Изчислява се отношението  $\underline{u}_2/\underline{u}_1$  чрез филтърните съпротивления  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  :

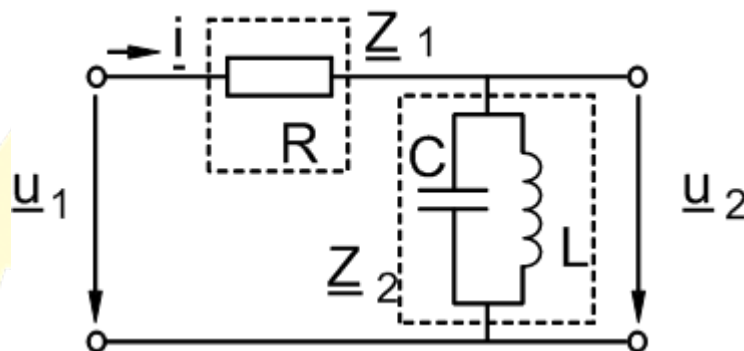
$$\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{1/\underline{Z}_1}{1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2}$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_L} = j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

$$\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = \frac{1/R}{1/R + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{1}{1 + jR\sqrt{\frac{C}{L}}(\omega\sqrt{LC} - \frac{1}{\omega\sqrt{LC}})} = \frac{1}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega})}$$

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{резонансна честота}$$

$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{качествен фактор}$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Приложение на вериги с елементи R, L и C

## Електрически филтри

### Пропускащ лентов филтър

Предавателно  
отношение:

$$\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = \left| \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} \right| e^{j\varphi(\omega)} = \frac{U_{m2}(\omega)}{U_{m1}} e^{j\varphi(\omega)}$$

се представя чрез:

Амплитудно-честотна  
характеристика:

$$\left| \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} \right| = \frac{U_{m2}(\omega)}{U_{m1}}$$

Фазо-честотна  
характеристика:

$$\varphi(\omega): \text{ фазовъгълна } \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1}$$

$$\left| \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} \right| = \frac{U_{m2}(\omega)}{U_{m1}} = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan Q\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през  
целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**

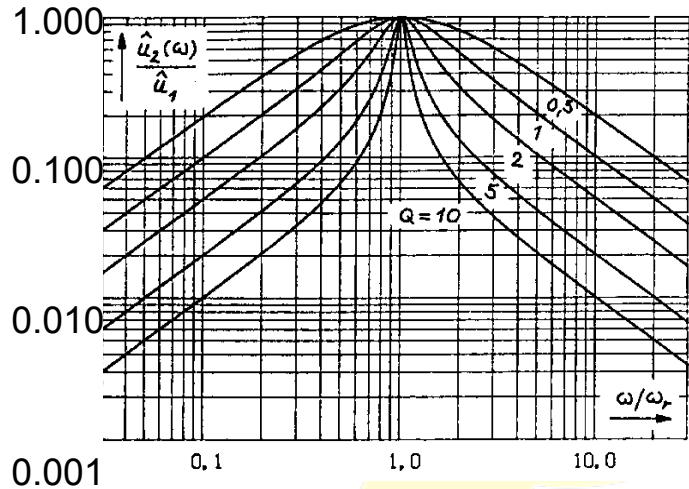


Европейски социален фонд

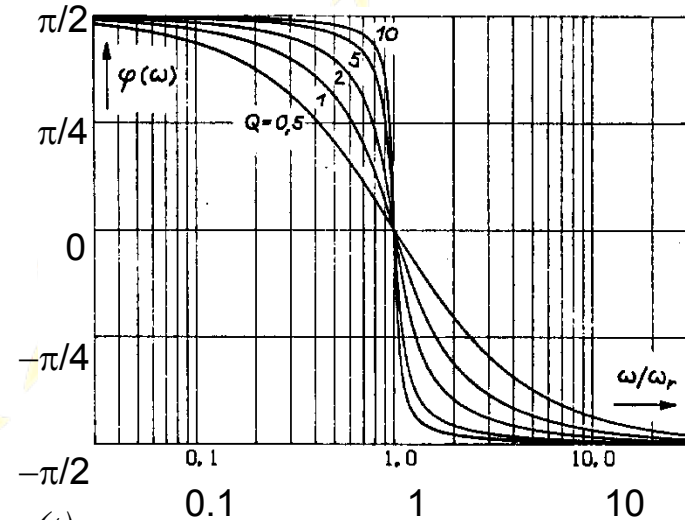
# Приложение на вериги с елементи R, L и C

## Електрически филтри

Амплитудно-честотна характеристика:



Фазо-честотна характеристика:



$\omega$  е кръговата честота на входния сигнал  $u_1(t)$ .

за  $\omega = \omega_r$ ,  $u_2 = u_1$ ,  $U_{m2} = U_{m1}$ ;  $j = 0$ ; също и при  $\omega \approx \omega_r$ ,  $u_2 \approx u_1$ ,  $U_{m2} \approx U_{m1}$ .

А за  $\omega >, \gg \omega_r$  както и за  $\omega <, \ll \omega_r$ ,  $U_{m2} <, \ll U_{m1}$ .

### Пропускащ лентов филтър:

Само входните сигнали с една тясна честотна лента около резонансната честота  $\omega_r$  се пропускат като изходен сигнал.



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

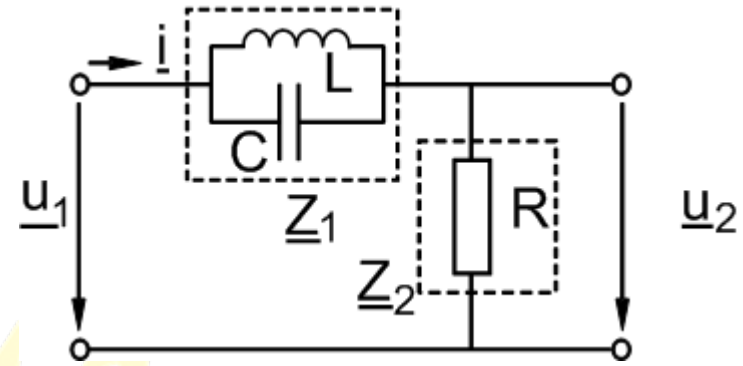
# Приложение на вериги с елементи R, L и C

## Електрически филтри. Преграден лентов филтър

Определяме  $\underline{u}_2/\underline{u}_1$  чрез комплексните съпротивления  $\underline{Z}_1$  und  $\underline{Z}_2$  :

$$\frac{1}{\underline{Z}_1} = j\omega C + \frac{1}{j\omega L}; \quad \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R}$$

$$\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = \frac{\frac{1}{\underline{Z}_1}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}} = \frac{j\omega C + \frac{1}{j\omega L}}{\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{jQ\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)}$$



Преграден лентов филтър

Амплитудно-честотна характеристика:

$$\left| \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} \right| = \frac{U_{m2}(\omega)}{U_{m1}} = \frac{\left| Q\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right) \right|}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)^2}}$$

Фазо-честотна характеристика:

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right) - \arctan Q\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

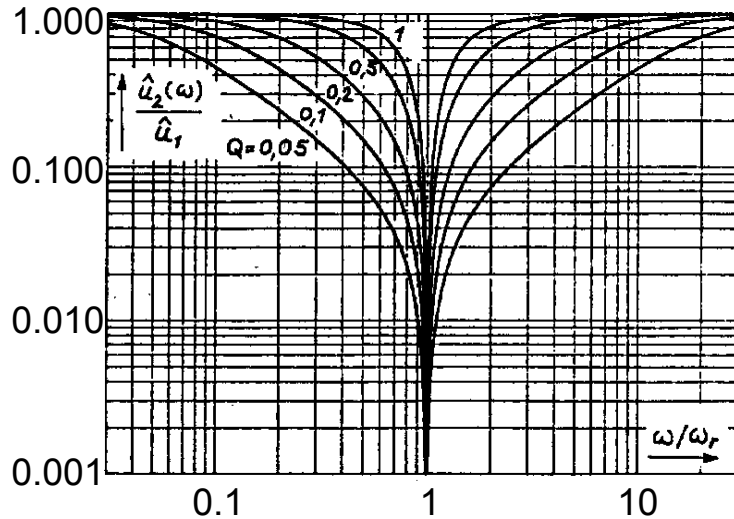
Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Приложение на вериги с елементи R, L и C Електрически филтри. Преграден лентов филтър

Амплитудно-честотна  
характеристика:



за  $\omega = \omega_r$ ,  $u_2 = 0$ , а също при  $\omega \approx \omega_r$  тогава  $\hat{u}_2 \ll \hat{u}_1$ .

Но при  $\omega >, \gg \omega_r$  а така също при  $\omega <, \ll \omega_r$  то  $\hat{u}_2 \approx \hat{u}_1$ .

Преграден лентов филтър :

Само входни сигнали с честоти в областта около резонансната честота  $\omega_r$  ще бъдат потискани, спирани, ще липсват в изходния сигнал.



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през  
целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Приложение на вериги с елементи R, L и C

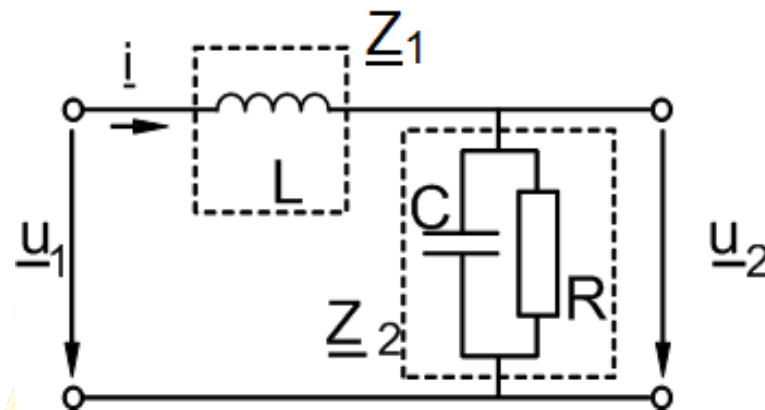
## Електрически филтри, нискочестотен пропускателен филтър.

Определяме  $\underline{u}_2/\underline{u}_1$  чрез комплексните съпротивления  $\underline{Z}_1$  und  $\underline{Z}_2$  :

$$\frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{j\omega L};$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R} + j\omega C$$

$$\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = \frac{\frac{1}{\underline{Z}_1}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}} = \frac{\frac{1}{j\omega L}}{\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{-jQ\frac{\omega_r}{\omega}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)}$$



нискочестотен  
пропускателен филтър

Амплитудно-честотна  
характеристика:

$$\left| \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} \right| = \frac{U_{m2}(\omega)}{U_{m1}} = \frac{Q\frac{\omega_r}{\omega}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)^2}}$$

Фазо-честотна  
характеристика:

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan Q\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през  
целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**

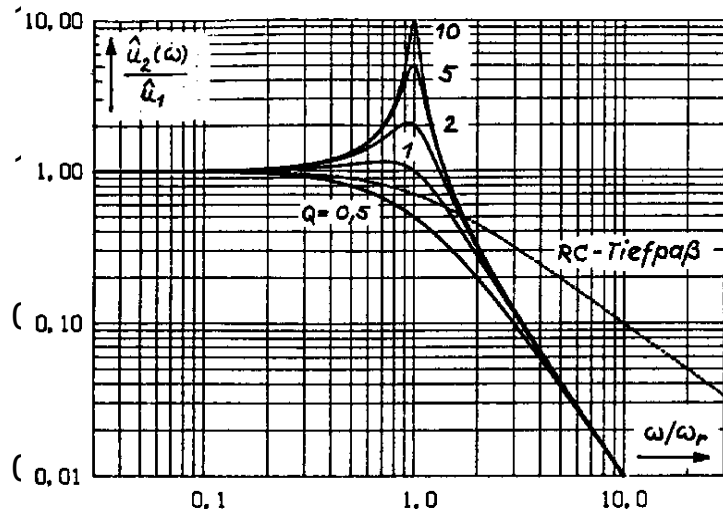


Европейски социален фонд



# Приложение на вериги с елементи R, L и C Електрически филтри, нискочестотен пропускателен филтър.

Амплитудно-честотна  
характеристика:



$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{u_2}{u_1} \right| = \frac{\omega_r^2}{\omega^2}$$

$Q \leq 1$ : за  $\omega < \omega_r$ ,  $U_{m2} \approx U_{m1}$ ,  
за  $\omega > \omega_r$ ,  $U_{m2}$  намалява с нарастване на  $\omega$ ,  
 $U_{m2} \ll, \ll U_{m1}$ .

Нискочестотен пропускателен филтър :

Входни сигнали с  $\omega < \omega_r$  се предават на изхода, а входни сигнали с  $\omega > \omega_r$ , с високи честоти се подтискат.



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през  
целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Приложение на вериги с елементи R, L и C

## Електрически филтри

Високочестотен пропускателен филтър

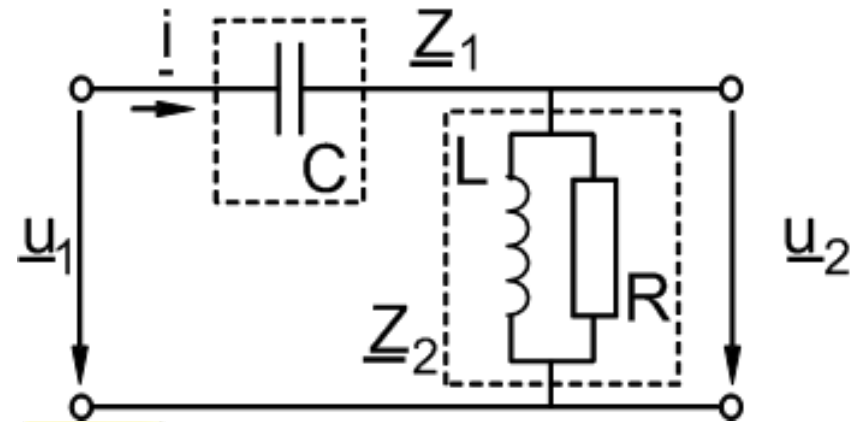
Определяме  $\underline{u}_2/\underline{u}_1$  чрез комплексните съпротивления  $\underline{Z}_1$  und  $\underline{Z}_2$  :

$$\frac{1}{\underline{Z}_1} = j\omega C; \quad \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}$$

$$\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = \frac{\frac{1}{\underline{Z}_1}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}} = \frac{j\omega C}{\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{jQ \frac{\omega}{\omega_r}}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)}$$

Амплитудно-честотна характеристика:

$$\left| \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} \right| = \frac{U_{m2}(\omega)}{U_{m1}} = \frac{Q \frac{\omega}{\omega_r}}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)^2}}$$



Високочестотен пропускателен филтър

Фазо-честотна характеристика:

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan Q \left( \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

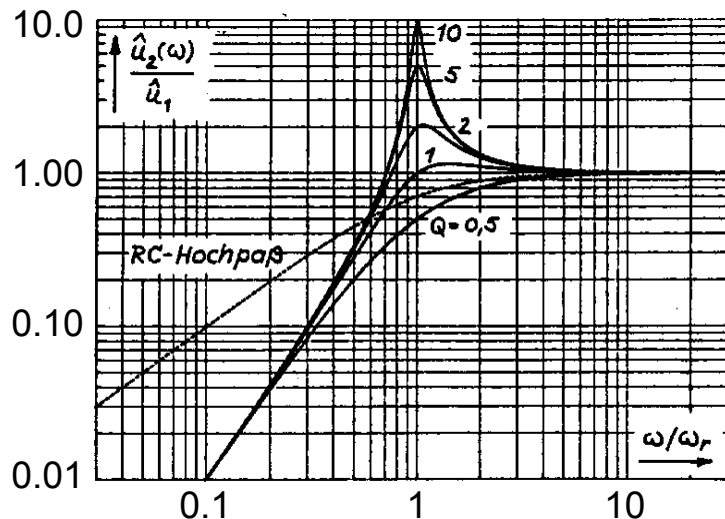
Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Приложение на вериги с елементи R, L и C Електрически филтри. Високочестотен пропускателен филтър

Амплитудно-честотна характеристика:



$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \left| \frac{u_2}{u_1} \right| = \frac{\omega^2}{\omega_r^2}$$

Високочестотен пропускателен филтър

Сигнали с ниски честоти,  $\omega < \omega_r$ , не се пропускат, а сигнали с високи честоти,  $\omega > \omega_r$ , преминават на изхода.



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

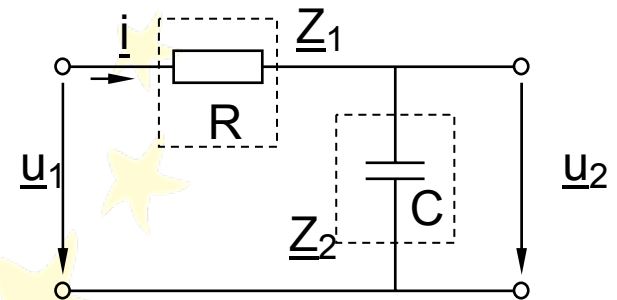
# Приложение на вериги с елементи R, L и C

## Електрически филтри

**RC-** нискочестотен пропускателен филтър :

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R}; \quad \frac{1}{Z_2} = j\omega C$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}; \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$



RC- нискочестотен пропускателен филтър

Амплитудно-честотна характеристика:

$$\left| \frac{u_2}{u_1} \right| = \frac{U_{m2}(\omega)}{U_{m1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\omega <, \ll \omega_0 \quad \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 <, \ll 1 \quad U_{m2} \approx U_{m1}$$

Фазо-честотна характеристика:

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_0} \quad \varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\omega = \omega_0 \quad (\text{гранична честота}) \quad U_{m2} \approx U_{m1} / \sqrt{2}$$

$$\omega >, \gg \omega_0 \quad \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 >, \gg 1 \quad U_{m2} \approx U_{m1} \frac{\omega_0}{\omega}$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

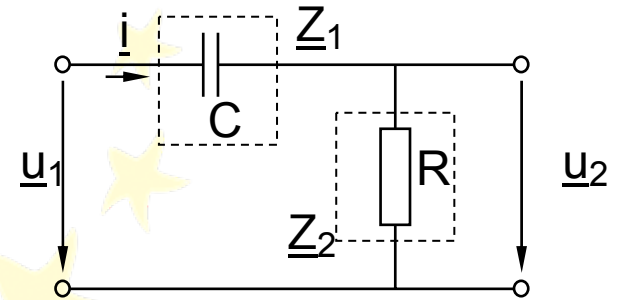
# Приложение на вериги с елементи R, L и C

## Електрически филтри

**RC-високочестотен пропускателен филтър:**

$$\frac{1}{Z_1} = j\omega C; \quad \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R}$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{j\omega C}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}; \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$



RC-високочестотен  
пропускателен  
филтър

Амплитудно-честотна характеристика:

$$\left| \frac{u_2}{u_1} \right| = \frac{U_{m2}(\omega)}{U_{m1}} = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\omega <, \ll \omega_0 \quad \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 <, \ll 1 \quad U_{m2} \approx U_{m1} \frac{\omega}{\omega_0}$$

Фазо-честотна характеристика:  $\omega = \omega_0$  (границна честота)  $U_{m2} \approx U_{m1} / \sqrt{2}$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega}{\omega_0} \quad \varphi(\omega_0) = \frac{\pi}{4} \quad \omega >, \gg \omega_0 \quad \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 >, \gg 1 \quad U_{m2} \approx U_{m1}$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

# Приложение на вериги с елементи R, L и C

## Електрически филтри

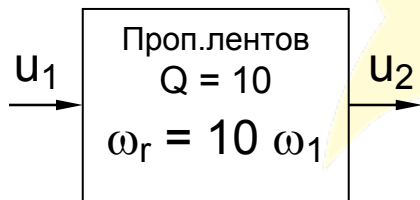
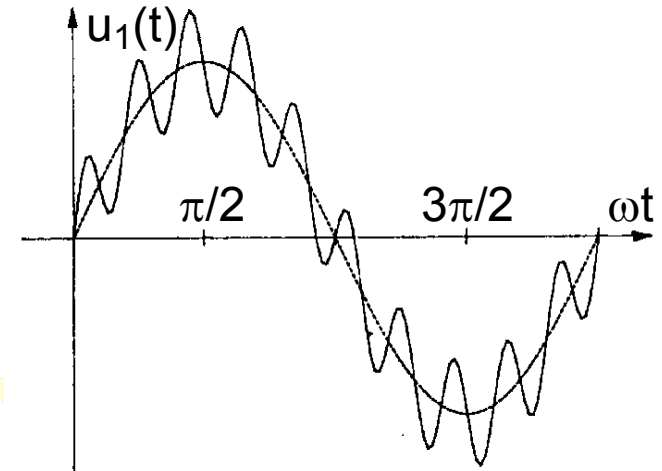
Входният сигнал  $u_1(t)$  се състои от наслагване на два сигнала:

$$u_1(t) = x_{m1} \sin \omega_1 t + y_{m1} \sin 10 \omega_1 t$$

Изходния сигнал  $u_2(t)$  има форма:

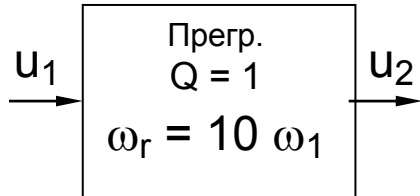
$$u_2(t) = \hat{x}_2 \sin(\omega_1 t + \alpha) + \hat{y}_2 \sin(10\omega_1 t + \beta)$$

амплитудите  $\hat{x}_2, \hat{y}_2$  се определят в зависимост от филтрите според амплитудночестотните им характеристики



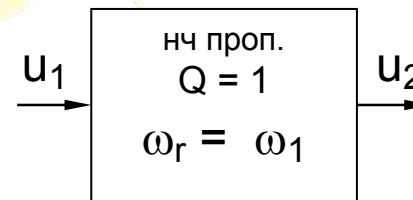
$$\hat{y}_2 = \hat{y}_1$$

$$\hat{x}_2 = 0.01 \hat{x}_1$$



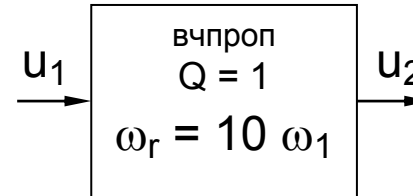
$$\hat{y}_2 = 0$$

$$\hat{x}_2 \approx \hat{x}_1$$



$$\hat{y}_2 = 0.01 \hat{y}_1$$

$$\hat{x}_2 = \hat{x}_1$$



$$\hat{y}_2 = \hat{y}_1$$

$$\hat{x}_2 = 0.01 \hat{x}_1$$



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене през целия живот и развитие на компетенции”

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
**Инвестира във вашето бъдеще!**



Европейски социален фонд

Литература: **Основна:**

1. Einführung in die Elektrotechnik für Studierende der Wirtschaftswissenschaften und für Chemieingenieure. Vorlesung an der Universität Karlsruhe. Teil 1, Kap. 4, Dr. Ing. Albert Krügel, 2002
2. Сборник примери и задачи по основи на електротехниката и електрониката под ред. Д.Цанов, Л.Павлов и др., изд. Техника 1993г. София. Стр.64-106.
3. Основи на електротехниката и електрониката. (Учебник за неелектротехническите специалности), Д.Цветков, Л.Павлов и др. Стр.192-275, изд. Техника 1989г. София.

**Допълнителна:**

4. Lehr-und Übungsbuch Elektrotechnik. S.Altmann, D.Schlager s.356 -360, Fachbuchverlag Leipzig-Köln 1995

**URL:**

1. [http://www.kosmos.ch/Technik/PFC\\_dt.pdf](http://www.kosmos.ch/Technik/PFC_dt.pdf)
2. [http://resursi.e-  
edu.bg/zmon/action/goToTheme;jsessionid=4DED6484AFD59EA5D99B1A  
436022AE20?id=Prog11.1110.core3.theme2](http://resursi.e-<br/>edu.bg/zmon/action/goToTheme;jsessionid=4DED6484AFD59EA5D99B1A<br/>436022AE20?id=Prog11.1110.core3.theme2)
3. [http://elearning-phys.uni-sofia.bg/~gchrista/Lekcii/VypBIOL-31-EM-  
Treptenia.pdf](http://elearning-phys.uni-sofia.bg/~gchrista/Lekcii/VypBIOL-31-EM-<br/>Treptenia.pdf)



Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042  
„Организационна и технологична инфраструктура за учене през  
целия живот и развитие на компетенции”  
Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на  
Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”,  
съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз  
Инвестира във вашето бъдеще!

